

PARAMETRES

β paramètre de forme $\beta \geq 0$
 η paramètre d'échelle $\eta \geq 0$
 γ est appelé paramètre de position $-\infty < \gamma < +\infty$

$\beta < 1 \Rightarrow \lambda(t) \downarrow$: période de jeunesse
 $\beta = 1 \Rightarrow \lambda(t) \rightarrow$: pas d'usure
 $\beta > 1 \Rightarrow \lambda(t) \uparrow$: période d'usure ou fatigue
 Si $\beta \approx 3,5$ on retrouve la loi normale
 Si $\beta \approx 1$, on retrouve la loi exponentielle

DENSITE DE PROBABILITE

CARACTERISTIQUES

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^\beta}, t \geq \gamma$$

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^\beta}$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1}$$

DETERMINATION DES PARAMETRES par la METHODE DES MOINDRES CARRES

La relation $F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^\beta}$ devient

$$\text{Ln} \left[\text{Ln} \left(\frac{1}{1 - F(t)} \right) \right] = \beta \text{Ln}(t - \gamma) - \beta \text{Ln} \eta$$

soit $Y = \beta X + C$

avec $Y = \text{Ln} \left[\text{Ln} \left(\frac{1}{1 - F(t)} \right) \right]$, $X = \text{Ln}(t - \gamma)$ et $C = -\beta \text{Ln} \eta$

⊗ Transformer les points $[t_i, F(t_i)]$ en points $[x_i, y_i]$

⊗ Représenter le nuage de points $[x_i, y_i]$

⊗ Déterminer les coefficients β et C par la méthode des moindres carrés. L'ajustement sera d'autant meilleur que le coefficient de corrélation sera proche de 1.

DETERMINATION DES PARAMETRES par un
AJUSTEMENT GRAPHIQUE selon le
PAPIER D'ALLAN PLATT

Ce papier porte 4 axes :

- t sur l'axe A
- F(t) en % sur l'axe B
- Ln t sur l'axe a
- Ln Ln $\frac{1}{1-F(t)}$ sur l'axe b

On trouve un référentiel X, Y permettant de déterminer β selon $Y = \beta X$

Méthode de recherche des paramètres :

1. Préparer les données
2. Tracer le nuage des points $M_i[F(t_i), t_i]$
3. Ajuster graphiquement le nuage par une droite D_1
 - a. Si l'ajustement linéaire est correct alors $\gamma = 0$
 - b. Sinon, rechercher la valeur de γ (voir méthode exposée en cours)
4. η est obtenu à l'intersection de D_1 et de l'axe A.
5. Tracer la droite $D_2 // D_1$ passant par l'origine du référentiel (X, Y).
6. β est obtenu à l'intersection de D_2 et de l'axe b

$$E(t) = \gamma + \eta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = \gamma + \eta \cdot A$$

$$V(t) = \eta^2 \cdot \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right] = \eta^2 \cdot B$$

La fonction Γ est le symbole de la fonction eulérienne de seconde espèce.

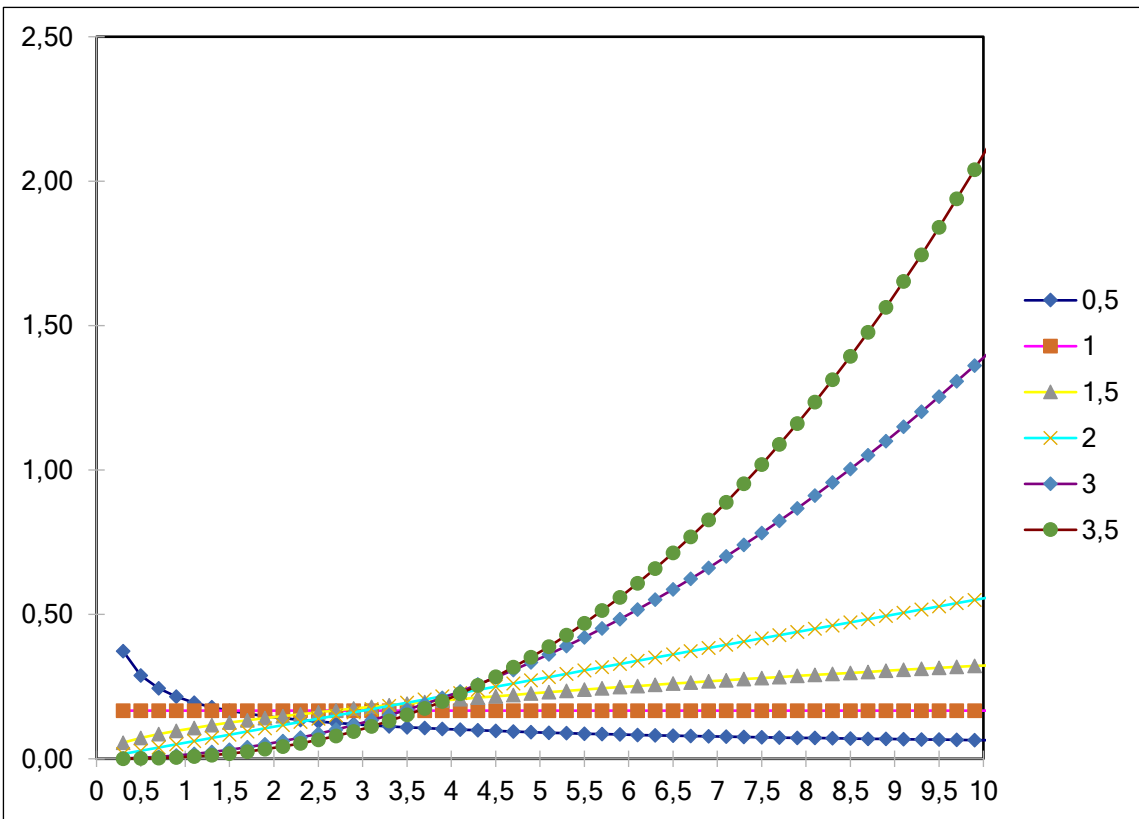
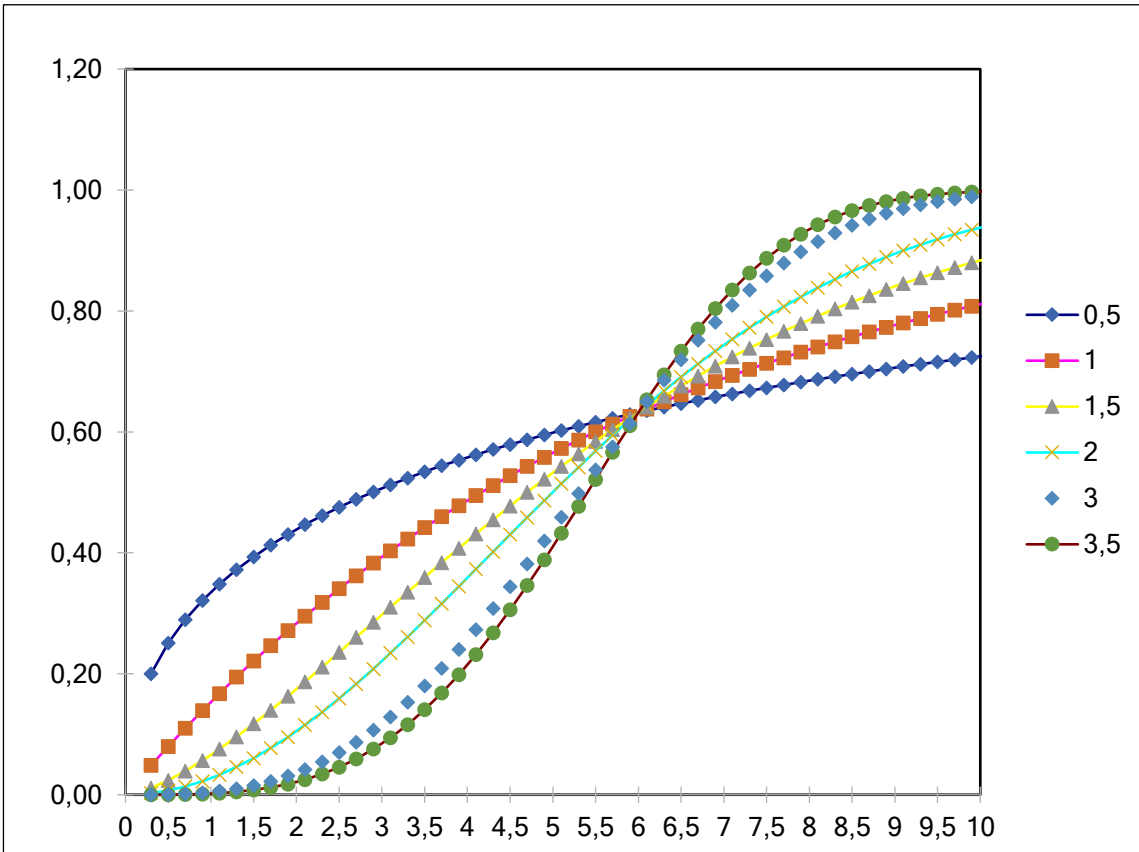
Une table donne les valeurs de A et de B en fonction de β

Durée de vie t_R associée à un seuil de fiabilité $R(t_R) = 1 - F(t_R)$

$$t_R = \gamma + \eta \left[-\text{Ln}(R(t)) \right]^{1/\beta}$$

Beta	t												
		0,5	1	1,5	2	3	3,5	0,5	1	1,5	2	3	
	10	0,3	0,30	0,16	0,06	0,02	0,00	0,00	0,20	0,05	0,01	0,00	0,00
	12	0,5	0,22	0,15	0,07	0,03	0,00	0,00	0,25	0,08	0,02	0,01	0,00
	2	0,7	0,17	0,15	0,08	0,04	0,01	0,00	0,29	0,11	0,04	0,01	0,00
	1	0,9	0,15	0,14	0,09	0,05	0,01	0,01	0,32	0,14	0,06	0,02	0,00
	1,5	1,1	0,13	0,14	0,10	0,06	0,02	0,01	0,35	0,17	0,08	0,03	0,01
		1,3	0,11	0,13	0,11	0,07	0,02	0,01	0,37	0,19	0,10	0,05	0,01
		1,5	0,10	0,13	0,11	0,08	0,03	0,02	0,39	0,22	0,12	0,06	0,02
	0,5	1,7	0,09	0,13	0,11	0,09	0,04	0,02	0,41	0,25	0,14	0,08	0,02
	1	1,9	0,08	0,12	0,12	0,10	0,05	0,03	0,43	0,27	0,16	0,10	0,03
	1,5	2,1	0,08	0,12	0,12	0,10	0,06	0,04	0,45	0,30	0,19	0,12	0,04
	2	2,3	0,07	0,11	0,12	0,11	0,07	0,05	0,46	0,32	0,21	0,14	0,05
	3	2,5	0,07	0,11	0,12	0,12	0,08	0,06	0,48	0,34	0,24	0,16	0,07
	3,5	2,7	0,06	0,11	0,12	0,12	0,09	0,07	0,49	0,36	0,26	0,18	0,09
	3,5	2,9	0,06	0,10	0,12	0,13	0,10	0,09	0,50	0,38	0,29	0,21	0,11
		3,1	0,06	0,10	0,12	0,13	0,12	0,10	0,51	0,40	0,31	0,23	0,13
		3,3	0,05	0,10	0,12	0,14	0,13	0,12	0,52	0,42	0,33	0,26	0,15
		3,5	0,05	0,09	0,12	0,14	0,14	0,13	0,53	0,44	0,36	0,29	0,18
		3,7	0,05	0,09	0,12	0,14	0,15	0,14	0,54	0,46	0,38	0,32	0,21
		3,9	0,05	0,09	0,12	0,14	0,16	0,16	0,55	0,48	0,41	0,34	0,24
		4,1	0,04	0,08	0,12	0,14	0,17	0,17	0,56	0,50	0,43	0,37	0,27
		4,3	0,04	0,08	0,12	0,14	0,18	0,19	0,57	0,51	0,45	0,40	0,31
		4,5	0,04	0,08	0,11	0,14	0,18	0,20	0,58	0,53	0,48	0,43	0,34
		4,7	0,04	0,08	0,11	0,14	0,19	0,21	0,59	0,54	0,50	0,46	0,38
		4,9	0,04	0,07	0,11	0,14	0,19	0,21	0,59	0,56	0,52	0,49	0,42
		5,1	0,04	0,07	0,11	0,14	0,20	0,22	0,60	0,57	0,54	0,51	0,46
		5,3	0,03	0,07	0,10	0,13	0,20	0,22	0,61	0,59	0,56	0,54	0,50
		5,5	0,03	0,07	0,10	0,13	0,19	0,22	0,62	0,60	0,58	0,57	0,54
		5,7	0,03	0,06	0,10	0,13	0,19	0,22	0,62	0,61	0,60	0,59	0,58
		5,9	0,03	0,06	0,09	0,12	0,19	0,22	0,63	0,63	0,62	0,62	0,61
		6,1	0,03	0,06	0,09	0,12	0,18	0,21	0,64	0,64	0,64	0,64	0,65
		6,3	0,03	0,06	0,09	0,12	0,17	0,20	0,64	0,65	0,66	0,67	0,69
		6,5	0,03	0,06	0,08	0,11	0,16	0,19	0,65	0,66	0,68	0,69	0,72
		6,7	0,03	0,05	0,08	0,11	0,15	0,18	0,65	0,67	0,69	0,71	0,75
		6,9	0,03	0,05	0,08	0,10	0,14	0,16	0,66	0,68	0,71	0,73	0,78
		7,1	0,03	0,05	0,08	0,10	0,13	0,15	0,66	0,69	0,72	0,75	0,81
		7,3	0,03	0,05	0,07	0,09	0,12	0,13	0,67	0,70	0,74	0,77	0,83
		7,5	0,02	0,05	0,07	0,09	0,11	0,11	0,67	0,71	0,75	0,79	0,86
		7,7	0,02	0,05	0,07	0,08	0,10	0,10	0,68	0,72	0,77	0,81	0,88
		7,9	0,02	0,04	0,06	0,08	0,09	0,08	0,68	0,73	0,78	0,82	0,90
		8,1	0,02	0,04	0,06	0,07	0,08	0,07	0,69	0,74	0,79	0,84	0,91
		8,3	0,02	0,04	0,06	0,07	0,07	0,06	0,69	0,75	0,80	0,85	0,93
		8,5	0,02	0,04	0,06	0,06	0,06	0,05	0,70	0,76	0,81	0,87	0,94
		8,7	0,02	0,04	0,05	0,06	0,05	0,04	0,70	0,77	0,83	0,88	0,95
		8,9	0,02	0,04	0,05	0,05	0,04	0,03	0,70	0,77	0,84	0,89	0,96
		9,1	0,02	0,04	0,05	0,05	0,04	0,02	0,71	0,78	0,85	0,90	0,97
		9,3	0,02	0,04	0,05	0,05	0,03	0,02	0,71	0,79	0,85	0,91	0,98
		9,5	0,02	0,03	0,04	0,04	0,02	0,01	0,72	0,79	0,86	0,92	0,98
		9,7	0,02	0,03	0,04	0,04	0,02	0,01	0,72	0,80	0,87	0,93	0,99
		9,9	0,02	0,03	0,04	0,04	0,02	0,01	0,72	0,81	0,88	0,93	0,99
		10,1	0,02	0,03	0,04	0,03	0,01	0,00	0,73	0,81	0,89	0,94	0,99
		10,3	0,02	0,03	0,03	0,03	0,01	0,00	0,73	0,82	0,89	0,95	0,99

3,5	0,5	1	1,5	2	3	3,5
0,00	0,37	0,17	0,06	0,02	0,00	0,00
0,00	0,29	0,17	0,07	0,03	0,00	0,00
0,00	0,24	0,17	0,09	0,04	0,01	0,00
0,00	0,22	0,17	0,10	0,05	0,01	0,01
0,00	0,19	0,17	0,11	0,06	0,02	0,01
0,00	0,18	0,17	0,12	0,07	0,02	0,01
0,01	0,17	0,17	0,13	0,08	0,03	0,02
0,01	0,16	0,17	0,13	0,09	0,04	0,02
0,02	0,15	0,17	0,14	0,11	0,05	0,03
0,03	0,14	0,17	0,15	0,12	0,06	0,04
0,03	0,13	0,17	0,15	0,13	0,07	0,05
0,05	0,13	0,17	0,16	0,14	0,09	0,07
0,06	0,12	0,17	0,17	0,15	0,10	0,08
0,08	0,12	0,17	0,17	0,16	0,12	0,09
0,09	0,12	0,17	0,18	0,17	0,13	0,11
0,12	0,11	0,17	0,19	0,18	0,15	0,13
0,14	0,11	0,17	0,19	0,19	0,17	0,15
0,17	0,11	0,17	0,20	0,21	0,19	0,17
0,20	0,10	0,17	0,20	0,22	0,21	0,20
0,23	0,10	0,17	0,21	0,23	0,23	0,23
0,27	0,10	0,17	0,21	0,24	0,26	0,25
0,31	0,10	0,17	0,22	0,25	0,28	0,28
0,35	0,09	0,17	0,22	0,26	0,31	0,32
0,39	0,09	0,17	0,23	0,27	0,33	0,35
0,43	0,09	0,17	0,23	0,28	0,36	0,39
0,48	0,09	0,17	0,23	0,29	0,39	0,43
0,52	0,09	0,17	0,24	0,31	0,42	0,47
0,57	0,09	0,17	0,24	0,32	0,45	0,51
0,61	0,08	0,17	0,25	0,33	0,48	0,56
0,65	0,08	0,17	0,25	0,34	0,52	0,61
0,69	0,08	0,17	0,26	0,35	0,55	0,66
0,73	0,08	0,17	0,26	0,36	0,59	0,71
0,77	0,08	0,17	0,26	0,37	0,62	0,77
0,80	0,08	0,17	0,27	0,38	0,66	0,83
0,84	0,08	0,17	0,27	0,39	0,70	0,89
0,86	0,08	0,17	0,28	0,41	0,74	0,95
0,89	0,07	0,17	0,28	0,42	0,78	1,02
0,91	0,07	0,17	0,28	0,43	0,82	1,09
0,93	0,07	0,17	0,29	0,44	0,87	1,16
0,94	0,07	0,17	0,29	0,45	0,91	1,24
0,96	0,07	0,17	0,29	0,46	0,96	1,31
0,97	0,07	0,17	0,30	0,47	1,00	1,39
0,97	0,07	0,17	0,30	0,48	1,05	1,48
0,98	0,07	0,17	0,30	0,49	1,10	1,56
0,99	0,07	0,17	0,31	0,51	1,15	1,65
0,99	0,07	0,17	0,31	0,52	1,20	1,74
0,99	0,07	0,17	0,31	0,53	1,25	1,84
1,00	0,07	0,17	0,32	0,54	1,31	1,94
1,00	0,06	0,17	0,32	0,55	1,36	2,04
1,00	0,06	0,17	0,32	0,56	1,42	2,14
1,00	0,06	0,17	0,33	0,57	1,47	2,25



10,5	0,02	0,03	0,03	0,03	0,01	0,00	0,73	0,83	0,90	0,95	1,00
10,7	0,02	0,03	0,03	0,02	0,01	0,00	0,74	0,83	0,91	0,96	1,00
10,9	0,02	0,03	0,03	0,02	0,00	0,00	0,74	0,84	0,91	0,96	1,00
11,1	0,02	0,03	0,03	0,02	0,00	0,00	0,74	0,84	0,92	0,97	1,00
11,3	0,02	0,03	0,03	0,02	0,00	0,00	0,75	0,85	0,92	0,97	1,00
11,5	0,02	0,02	0,02	0,02	0,00	0,00	0,75	0,85	0,93	0,97	1,00
11,7	0,01	0,02	0,02	0,01	0,00	0,00	0,75	0,86	0,93	0,98	1,00
11,9	0,01	0,02	0,02	0,01	0,00	0,00	0,76	0,86	0,94	0,98	1,00
12,1	0,01	0,02	0,02	0,01	0,00	0,00	0,76	0,87	0,94	0,98	1,00

1,00	0,06	0,17	0,33	0,58	1,53	2,36
1,00	0,06	0,17	0,33	0,59	1,59	2,48
1,00	0,06	0,17	0,34	0,61	1,65	2,59
1,00	0,06	0,17	0,34	0,62	1,71	2,72
1,00	0,06	0,17	0,34	0,63	1,77	2,84
1,00	0,06	0,17	0,35	0,64	1,84	2,97
1,00	0,06	0,17	0,35	0,65	1,90	3,10
1,00	0,06	0,17	0,35	0,66	1,97	3,23
1,00	0,06	0,17	0,36	0,67	2,03	3,37

